Απειροστικός Λογισμός Ι

Μάθημα 19

09/12/2015 ①

Παρατήρηση: Οι $f(x)=\sin(1/x)$ και $g(x)=\cos(1/x)$ δεν έχουν όριο στο 0.

$x_n=\frac{1}{2n\pi}$ $x_n\to 0$ και $f(x_n)=\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right)=\sin(2n\pi)=0\to 0$

$y_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ $y_n\to 0$ και $f(y_n)=\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}}\right)=\sin(2n\pi+\pi/2)=1\to 1$

Άρα το όριο της f δεν υπάρχει.

Ομοίως για τη $g(x)$.

Πρόταση: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A και $f:A\to\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Έστω $g:B\to\mathbb{R}$ με $f(A)\subseteq B$, $\ell\in B$ και g συνεχής στο ℓ. Τότε $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=g(\ell)$.

Απόδειξη:

Έστω $(x_n)\in A$ με $x_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ώστε $x_n\to x_0$. Εφόσον $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$, από την αρχή της μεταφοράς για όρια, προκύπτει $f(x_n)\to\ell$. Εφόσον η g είναι συνεχής στο ℓ έχουμε ότι $g(f(x_n))\to g(\ell)$. Από την αρχή της μεταφοράς για όρια, έχουμε $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x))=g(\ell)$

Παρατήρηση: Αν g συνεχής στο $\ell=\lim_{x\to x_0}f(x)$ τότε $\lim_{x\to x_0}g(f(x))=g(\lim_{x\to x_0}f(x))$

Παράδειγμα: Ξέρουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Αφού η $g(x)=e^x$ και συνεχής στο 1 $\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^1=e$

Πρόταση: $f:A\to\mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A, $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$, $f(A)\subseteq B$, ℓ σ.σ. του B και $\exists\delta>0$ $f(x)\neq\ell$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ $\lim_{x\to\ell}g(x)=m$. Τότε, $\lim_{x\to x_0}g(f(x))=m$.

Πρόταση: Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και x_0 μεμονωμένο σημείο του A. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη:

Εφόσον το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο $\exists\delta>0$

$A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x_0\}$.

Έστω $\epsilon>0$. Για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$ τότε $x=x_0$.

Άρα, $|f(x)-f(x_0)|=0<\epsilon$.

Επομένως, η f συνεχής στο x_0.

Είδη Ασυνεχειών

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ τότε η f ασυνεχής στο x_0.

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το x_0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A, άρα είναι σημείο συσσώρευσης του.

Υποθέτουμε πως το x_0 είναι σ.σ. του A από τα δεξιά. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις

α) Υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f στο x_0 και είναι ίσα μεταξύ τους.

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ με $\ell \neq f(x_0)$

Τότε λέμε πως η f έχει επουσιώδη ασυνέχεια στο x_0.

β) Υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια της f και είναι διαφορετικά μεταξύ τους

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$

Τότε λέμε πως η f παρουσιάζει άλμα στο x_0 μεγέθους $|\ell_2 - \ell_1|$.

γ) Ένα από τα δύο πλευρικά όρια δεν υπάρχει.

Τότε λέμε πως η f έχει ουσιώδη ασυνέχεια στο x_0.

Πρόταση: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A.
Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν.ν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε πως η f είναι συνεχής στο x_0.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Τότε $\exists \delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Έτσι για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Συνεπώς, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Τότε $\exists \delta > 0$ ώστε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Επίσης, για $x = x_0$, $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Συνεπώς, για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα, η f συνεχής στο x_0

Παραδείγματα: α) $f(x) = e^x$, $\lim_{x\to 5} e^x = e^5$

β) $g(x) = \sin(e^{\cos x})$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών

$\lim_{x \to \pi/2} g(x) = g(\pi/2) = \sin(e^{\cos(\pi/2)}) = \sin e^0 = \sin 1$.

Ασκήσεις:

1) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$.
Να δείξετε ότι: α) $\exists\, \theta>0$ $f(x)\geq\theta$ $\forall x\in[a,b]$

β) $\exists\, \theta_1>0$ $f(x)>\theta_1$ $\forall x\in[a,b]$

Απόδειξη

α) Η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, άρα $\exists\, x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in[a,b]$

Θέτω $\theta=f(x_0)$, τότε $\theta>0$ και $f(x)\geq\theta$ $\forall x\in[a,b]$

β) Για $\theta_1=\theta/2>0$ και $f(x)\geq\theta>\theta_1=\theta/2$ $\forall x\in[a,b]$.

2) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)|\leq|x|$ (I) $\forall x\in\mathbb{R}$
Να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Απόδειξη:

Από την (I) για $x=0$ $|f(0)|\leq|0|$ άρα $f(0)=0$.

Έστω $\epsilon>0$. Θέτουμε $\delta=\epsilon$.

Αν $|x-0|<\delta$ τότε $|f(x)-f(0)|=|f(x)-0|=|f(x)|\leq|x|<\delta=\epsilon$.

Άρα, η f είναι συνεχής στο 0.

3) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ x^2, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1 και ασυνεχής σε κάθε άλλο σημείο.

Απόδειξη

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ με $x_0\neq0$ και $x_0\neq1$. Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

1η περίπτωση: $x_0\in\mathbb{Q}$ τότε $f(x_0)=x_0$

Επιλέγουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από άρρητους (στο $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) με $x_n\to x_0$.

$f(x_n)=x_n^2$ $\quad x_n^2\to x_0^2\neq x_0=f(x_0)$ δηλαδή $f(x_n)\not\to f(x_0)$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

2η περίπτωση: $x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ τότε $f(x_0)=x_0^2$

Επιλέγουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ρητών (στο $\mathbb{Q}$) με $x_n\to x_0$.

$f(x_n)=x_n\to x_0\neq x_0^2=f(x_0)$ δηλαδή $f(x_n)\not\to f(x_0)$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

• Η f συνεχής στο 0.

Έστω $\varepsilon>0$. $f(0)=0$

Εφόσον $\lim_{x\to 0} x=0$ $\exists \delta_1>0$ ώστε για $x\in\mathbb{R}$ με $|x-0|<\delta_1$ να ισχύει $|x-0|<\varepsilon$

και $\lim_{x\to 0} x^2=0$ $\exists \delta_2>0$ ώστε για $x\in\mathbb{R}$ με $|x-0|<\delta_2$ να ισχύει $|x^2-0|<\varepsilon$.

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ και $\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-0|<\delta$ έχουμε:

αν $x\in\mathbb{Q}$ $|f(x)-f(0)|=|x-0|<\varepsilon$

αν $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ $|f(x)-f(0)|=|x^2-0|<\varepsilon$.

Επομένως, $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. Άρα, η f συνεχής στο 0.

• Η f συνεχής στο 1.

Έστω $\varepsilon>0$. $f(1)=1$

Εφόσον $\lim_{x\to 1} x=1$ $\exists \delta_1>0$ ώστε για $x\in\mathbb{R}$ με $|x-1|<\delta_1$ να ισχύει $|x-1|<\varepsilon$

και $\lim_{x\to 1} x^2=1$ $\exists \delta_2>0$ ώστε για $x\in\mathbb{R}$ με $|x-1|<\delta_2$ να ισχύει $|x^2-1|<\varepsilon$.

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ και $\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-1|<\delta$ έχουμε (διακρίνοντας περιπτώσεις $x\in\mathbb{Q}$ ή $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) ότι: $|f(x)-1|<\varepsilon$. Άρα, η f συνεχής στο 1.